0.1 Vector bundle と Manifold

M は $\dim M = m$ の smooth manifold で登場する関数、写像はすべて smooth map とする。

Definition 0.1.1

$a \in M$ に対し、a の開近傍を定義域とした smooth-function 全体を $C(a)$ と書くことにする。$f \in C(a)$ に対し、$U(f)$ をその定義域とする。$f, g \in C(a)$, $r \in \mathbf{R}$ に対し、

1. $f + g(x) = f(x) + g(x)$
2. $fg(x) = f(x)g(x)$
3. $rf(x) = r(f(x))$

で定義することにより、和、積、スカラー倍が定義できる。ただし、$U(f+g) = U(fg) = U(f) \cap U(g)$ であり、$U(rf) = U(f)$ である。このとき、

$$\theta : C(a) \longrightarrow \mathbf{R}$$

で、次の条件を満たす写像を考える。

1. $\theta(f + g) = \theta(f) + \theta(g)$
2. $\theta(rf) = r(\theta(f))$
3. $\theta(fg) = \theta(f)g(a) + f(a)\theta(g)$

この写像全体の集合を $D(C(a))$ とおく。このとき、

$$(\theta + \eta)(f) = \theta(f) + \eta(f) \quad , \quad (r\theta)(f) = r(\theta(f))$$

で定義することにより、$D(C(a))$ は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間である。

Example 0.1.2

$a \in \mathbf{R}$ に対し、$\dfrac{d}{dt}_{|t=a} : C(a) \longrightarrow \mathbf{R}$ で定義すれば、$\dfrac{d}{dt}_{|t=a} \in D(C(a))$ である。

Lemma 0.1.3

$c_p \in C(a)$ を $p \in \mathbf{R}$ への constant map とする。このとき、任意の $\theta \in D(C(a))$ に対し、$\theta(c_p) = 0$ である。

proof) $U(f) = U(c_p)$ となる任意の $f \in C(a)$ に対し、$c_p f = pf$ である。積の微分から、

$$\theta(c_p f) = \theta(c_p)f(a) + c_p(a)\theta(f) = \theta(c_p)f(a) + p\theta(f)$$

であるが、一方スカラー倍の微分から、

$$\theta(pf) = p\theta(f)$$

であるから、結局、$\theta(c_p)f(a) = 0$ である。$f \in C(a)$ は任意だったので、$f(a) \neq 0$ となる f を選べば、$\theta(c_p) = 0$ である。

□

Lemma 0.1.4

$f \in C(a)$ で、V は $U(f)$ に含まれる a の開近傍とする。そのとき、任意の $\theta \in D(C(a))$ に対し、$\theta(f) = \theta(f_{|V})$ である。

proof)　$f - f_{|V} \in C(a)$ を考えたとき、$U(f - f_{|V}) = V$ であり、これは、V 上の 0 への定値関数である。よって、Lemma 0.1.3 より、$\theta(f - f_{|V}) = 0$。つまり、$\theta(f) = \theta(f_{|V})$

□

Corollary 0.1.5

$f, g \in C(a)$ で、a のある開近傍 V において、$f_{|V} = g_{|V}$ ならば、$\theta(f) = \theta(g)$

□

Definition 0.1.6

$C(a)$ はベクトル空間ではない。M 上の 0-map $0 : M \longrightarrow \mathbf{R}$ が零元であるが、$f - f$ は $U(f)$ 上では恒等的に 0 だが、$U(f) \neq M$ の場合も考えられる。そこで、$f \sim g \in C(a)$ を $^{\exists}V$: a の開近傍　s.t　$f_{|V} = g_{|V}$ と定義すれば、これは同値関係と成り、$\mathrm{germ}C(a) = C(a)/\sim$ とおくと、これは $C(a)$ の和とスカラー倍からの誘導で $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間となる。Lemma 0.1.4 により、$\theta \in D(C(a))$ は、

$$\theta : \mathrm{germ}C(a) \longrightarrow \mathbf{R}$$

と考えるのが妥当である。

Definition 0.1.7

$a \in M$ とする。$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ で、$\gamma(0) = a$ となる smooth-curve を a を通る曲線と呼ぶ。このとき、$f \in C(a)$ に対し、$f\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbf{R}$ と考えられる。(γ の像と、$U(f)$ にギャップがあっても、ε をいくらでも小さく取って、$U(f)$ の中に収めてしまえばよい)。このとき、

$$X_\gamma f = \frac{d(f\gamma)}{dt}_{|t=0}$$

とおく。

Lemma 0.1.8

$X_\gamma \in D(C(a))$ である。

$(f+g)\gamma = f\gamma + g\gamma$ と、$(fg)\gamma = (f\gamma)(g\gamma)$ であるので、通常の関数の和と積の微分法から、

$$X_\gamma(f+g) = X_\gamma(f) + X_\gamma(g)$$

$$X_\gamma(fg) = X_\gamma(f)g\gamma(0) + f\gamma(0)X_\gamma(g) = X_\gamma(f)g(a) + f(a)X_\gamma(g)$$

であり、特に上の式で、$f = c_r$ とおくと、$X_\gamma(c_r) = 0$ であったから、

$$X_\gamma(rg) = X_\gamma(c_r g) = X_\gamma(c_r)g(a) + c_r(a)X_\gamma(g) = rX_\gamma(g)$$

となる。

□

Definition 0.1.9

$T_aM = \{X_\gamma \in D(C(a)) \mid \gamma : a$ を通る M の smooth curve$\}$ とおき、これを a の接空間（tangent space）と呼ぶ。

Theorem 0.1.10

T_aM は $D(C(a))$ の m 次元部分ベクトル空間で、a の周りの任意の座標近傍 $(x_1, \cdots, x_m)$ に対し、$\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ が基底となる。

proof)　　T を $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ で張られる $D(C(a))$ の部分ベクトル空間とする。$\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ が一次独立であることを示す。これは、$X = \sum_{1 \leqq j \leqq m} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$ とすると、i 次 projection の x_i に対し、$X_{x_i} = \sum_{1 \leqq j \leqq m} \alpha_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \alpha_i = 0$ だからである。また、$X_\gamma \in T_a(M)$ に対し、

$$X_\gamma = \sum_{1 \leqq j \leqq m} \frac{d\gamma_j}{dt}(0) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

であるため、$X_\gamma \in T$。すなわち、$T_aM \subset T$。

次に逆の包含関係を示す。$\sum_{1 \leqq j \leqq m} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in T$ に対し、$\gamma_j(t) = \alpha_j t$ で定義し、$\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ とおけば、$X_\gamma = \sum_{1 \leqq j \leqq m} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ であるので、題意が示せた。

□

Definition 0.1.11

集合 $TM = \coprod_{x \in M} T_xM$ とおき、$\pi : TM \longrightarrow M$ を $v \in T_xM$ に対し、$\pi(v) = x$ で定義する。また、U : open in M に対し、$\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbf{R}^m$ を、$v = \sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in T_xU$ に対し、$\varphi(v) = (x, \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ で定義すれば、これは全単射である。このとき、TM の位相として、

1. $\pi : TM \longrightarrow M$ が連続
2. $\varphi : \pi^{-1}(U) = TU \longrightarrow U \times \mathbf{R}^m$ が同相

となるものが一意に存在するので、それを入れる。

$$\pi : TM \longrightarrow M$$

は vector bundle となる。さらには、TM の多様体構造で、$\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbf{R}^m$ が smooth になるようなものが一意的に存在する。このとき、$\pi : TM \longrightarrow M$ も smooth となる。

Definition 0.1.12

$f : M \longrightarrow N$: smooth map に関して、$df_x : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$ が、$X_\gamma \mapsto X_{f \circ \gamma}$ により定義され、これは線形写像である。ここから、vector bundle 間の fiber preserving map $df : TM \longrightarrow TN$ が誘導される。

Definition 0.1.13 (Dual bundle)

$p : E \longrightarrow X$ を vector bundle としたとき、$E_x^* = \mathrm{Hom}(E_x, \mathbf{R})$ の線形写像の線形空間を考え、

$$p^* : \coprod_{x \in X} E_x^* \longrightarrow X$$

を、$p^*(E_x) = x$ で局所自明化は、$\varphi : E_U \longrightarrow U \times \mathbf{R}^m$ を $p : E \longrightarrow X$ の局所自明化としたとき、$\varphi^* : U \times (\mathbf{R}^m)^* \longrightarrow E^*(U) = \coprod_{x \in U} E_x^*$ が誘導されるが、$(\mathbf{R}^m)^* \cong \mathbf{R}^m$ なので、$(\varphi^*)^{-1}$ が局所自明化であり、そういうように E^* に位相を入れる。E^* を E の双対バンドルと呼ぶ。

Definition 0.1.14 (Hom bundle)

X 上の 2 つの vector bundle、$E \longrightarrow X$ と $E' \longrightarrow X$ に対し、$\mathrm{Hom}(E, E') = \coprod_{x \in X} \mathrm{Hom}(E_x, E'_x)$ で定義し、$\pi : \mathrm{Hom}(E, E') \longrightarrow X$ を $\pi(\mathrm{Hom}(E_x, E_{x'})) = x$ で定義すると、これは vector bundle となる、これを Hom bundle と呼ぶ。

Definition 0.1.15

$E \longrightarrow X$ を X 上の vector bundle とし、$\Gamma(E)$ をその section の集合とする。このとき、$(s + s')(x) = s(x) + s'(x)$ と $(rs)(x) = r(sx)$ の和とスカラー倍で $\Gamma(X)$ は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間になる。

Remmark 0.1.16

$E \longrightarrow X$ と $E' \longrightarrow X$ を X 上の vector bundle としたとき、Hom bundle $\mathrm{Hom}(E, E')$ の section を考えたとき、$s : X \longrightarrow \mathrm{Hom}(E, E') = \coprod_{x \in X} \mathrm{Hom}(E_x, E'_x)$ は、$s(x) : E_x \longrightarrow E'_x$ を与えるので、$s : E \longrightarrow E'$ は bundle 間の準同型である。

Theorem 0.1.17 (リースの表現定理)

H を Hirbelt 空間としたとき、任意の $\alpha \in H^* = \mathrm{Hom}(H, \mathbf{R})$ に対し、$x \in H$ で、任意の $y \in H$ に対し、$\alpha(y) =< x, y >$ となる x が一意に存在する。

Corollary 0.1.18

$p : E \longrightarrow X$ を Riemman 計量の与えられた vector bundle としたとき、bundle としての同型、$E \cong E^*$ である。

proof) $\theta : E \longrightarrow E^*$ を、$E(u)(v) =< u, v >$ で定義する。ただし、$u, v \in E_{p(u)}$。このとき、各 fiber（$\mathbf{R}^m$ と同型なので Hirbelt 空間）間ではリースの表現定理から、同型である。

□

Definition 0.1.19

$TM \longrightarrow M$ の section を vector field と呼ぶ。

Definition 0.1.20

$f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ を Riemman manifold 上の smooth map としたとき、bundle 間の線形写像、$df : TM \longrightarrow T\mathbf{R}$ を考え、base をそろえるため pull back を取り、Remmark 0.1.16 と Cor 0.1.18 により、

$$df \in \{TM \longrightarrow TR\} \cong \{TM \longrightarrow M \times R\} = \Gamma(\mathrm{Hom}(TM, M \times \mathbf{R})) = \Gamma\left(\coprod_{x \in M} \mathrm{Hom}(T_xM, \mathbf{R})\right) = \Gamma(T^*M) \cong \Gamma(TM)$$

となり、この対応での像を、$df \mapsto \mathrm{grad} f$ とおく。つまり、$x \in M$ と $X \in T_xM$ に対し、

$$df_x(X) = < \mathrm{grad} f_x, X >$$

となる $\mathrm{grad} f_x \in T_xM$ が一意に存在する。